RASTERS EN ROOSTERS
deel 1
rechthoekige rasters

Hein van Winkel

8 juli 2023

Inhoudsopgave

1 Rasters tellen met de hand. 5

2 Groepen en Dekpunten 13

3 Lineaire rasters 21

4 Rechthoekige rasters 23

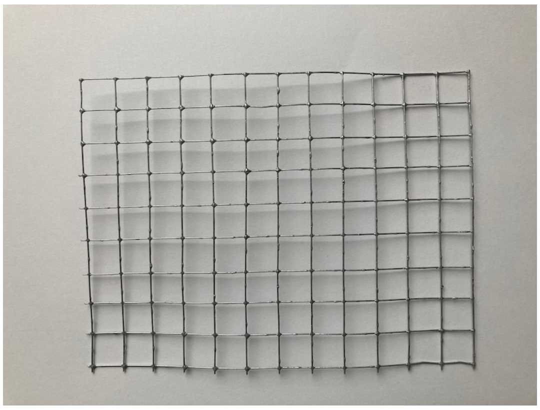
5 Vierkante rasters 31

6 Priemgetallen in de verzameling a(p,m,n) 37

Hoofdstuk 1

Rasters tellen met de hand.

inleiding



Figuur 1.1:

Dit boek gaat over rasters en roosters en in het bijzonder over rechthoekige rasters en roosters. Onder een **rechthoekig rooster** verstaan we een aantal lijnen die een deel van het platte vlak verdelen in vierkantjes. Een rooster van 13 bij 10 bestaat zodoende uit $13 \cdot 10 = 130$ roosterpunten, verbonden door lijnstukjes, zodat er in totaal $12 \cdot 9 = 108$ vierkantjes zijn.
In het rooster markeren we een aantal van deze roosterpunten. Zo'n gemarkeerd punt noemen we een **stip**. Zo zal het rooster van 13 bij 10 op 130 verschillende manieren één stip kunnen krijgen, er zijn immers 130 punten. Door draaien en spiegelen zijn een aantal van deze 130 roosters in feite gelijk. Er zijn bijvoorbeeld vier roosters met een stip op een hoekpunt. Omdat

deze vier na wat spiegelen en draaien niet van elkaar te onderscheiden zijn, spreken we van slechts één **raster** met een stip op de hoek. De vraag is nu hoeveel verschillende rasters er zijn van 13 bij 10 of ook een $(13 \cdot 10)$-rasters met één stip.
Het doel van dit boekje is tenslotte te komen tot formules $a(p, m, n)$, die het aantal $(m \cdot n)$-rasters met p stippen geven. Zo is $a(1, 13, 10) = 35$. In de eerste drie hoofdstukken beperken we ons tot rasters, waarbij m≠n is.

permutaties en combinaties

Bij dit soort telproblemen is het handig iets over permutaties en combinaties te weten.

$$\begin{pmatrix} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cbda & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{pmatrix}$$

Hierboven staan de 24 **permutaties** van de letters a, b, c, d. Dat het er 24 zijn is niet moeilijk te tellen. Voor de eerste letter heb je de keus uit 4. Daarna is er voor de tweede letter nog de keus uit 3. Samen geeft dit $4 \cdot 3 = 12$ keuzemogelijkheden. Voor de derde letter is er nog een keus uit de 2 overgebeleven. En ten slotte is er voor de laatste letter de keus uit 1. Totaal aantal permutaties wordt dus $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. We korten dit soort producten af met 4! en zeggen 4 faculteit.
Het begrip permutatie wordt ook gebruikt voor de afbeelding, waarbij *abcd* bij voorbeeld overgaat in *cbda*. We zien dat b op de tweede plaats blijft en dat a, c, d respectievelijk vervangen worden door c, d, a. Deze afbeelding wordt vaak genoteerd met $(acd) : abcd \rightarrow cbda$.
De groep van deze afbeeldingen wordt vaak aangeduid met S_4. Nog een gebruik van het woord permutatie komt voor wanneer we bijvoorbeeld twee van de vier letters kiezen. We hebben dan, zoals we eerder al zagen $4 \cdot 3 = 12$ mogelijkheden, de 12 permutaties van 2 uit 4. In het voorbeeld zijn dit $\{ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc\}$.

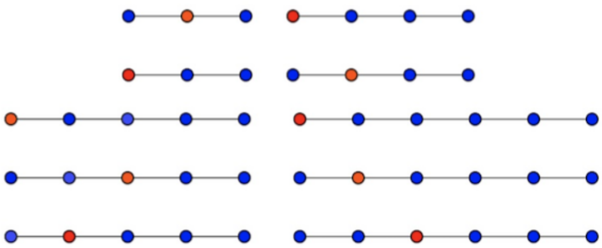
In het voorbeeld van de vier letters noemen we een deel van de vier letters een **combinatie** van de letters. Zo is het aantal van de combinaties van 2 van de 4 letters gelijk aan 6, de helft van het aantal permutaties van twee van de vier. Handig is om hier een formule voor te hebben. Zo is het aantal combinaties van 3 van de 7 letters a, b, c, d, e, f, g gelijk aan 35. We hebben

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ permutaties. Als we niet op de volgorde letten, dan tellen de 3! volgorden van een drietal letters als één combinatie. We vinden nu dat het aantal combinaties van 3 van de 7 gelijk is aan $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ elementen. Het aantal combinaties wordt ook wel een binomiaalcoëfficiënt genoemd en deze getallen vormen de driehoek van Pascal. De gebruikelijke notatie voor het aantal combinaties van b elementen uit a is

$$\binom{a}{b} = \frac{a(a-1)\cdots(a-(b-1))}{1 \cdot 2 \cdots b}$$

Let er op dat in de teller en de noemer van de breuk altijd evenveel factoren staan.

1 stip op een (m·1)-raster.



Figuur 1.2:

We beginnen gemakkelijk met één stip op een (m·1)-raster. We noemen zo'n raster ook wel een **staaf**. Zie figuur 1.2 , waarin alle oplossingen voor één stip (rood) op een (m·1)-grid staan getekend voor $m = 3, 4, 5, 6$. We zien dus dat het aantal rasters met 1 stip van drie bij één gelijk is aan twee en noteren dit met $a(1, 3, 1) = 2$. In dezelfde figuur zien we $a(1, 4, 1) = 2, a(1, 5, 1) = 3, a(1, 6, 1) = 3$.

Algemene formule voor $a(1, m, 1)$

We onderscheiden twee gevallen:

m is even. Dan $m = 2m_2$ voor een geheel getal m_2. Elk punt links van het midden correspondeert met een symmetrisch gelegen punt rechts van het midden en de roosters met 1 stip zijn derhalve twee aan twee gelijk. In dit geval zijn er dus $\frac{1}{2}m = m_2$ verschillende rasters.

m is oneven. Dan zij $m = 2m_2 + 1$ voor een geheel getal m_2. Opnieuw correspondeert elk punt links van het midden met een symmetrisch gelegen punt rechts van het midden. Het aantal dergelijke rasters is m_2. Bovendien is het rooster met de stip in het midden een raster. Er zijn dus $m_2 + 1 = \frac{1}{2}(m-1) + 1 = \frac{1}{2}(m+1)$ verschillende rasters.

In formule:

$$\begin{array}{lllll} a(1,m,1) & = & a(1,2m_2+1,1) & = & m_2+1 \quad (m = 2m_2+1) \text{ oneven} \\ a(1,m,1) & = & a(1,2m_2,1) & = & m_2 \quad\quad\;\; (m = 2m_2) \text{ even} \end{array}$$

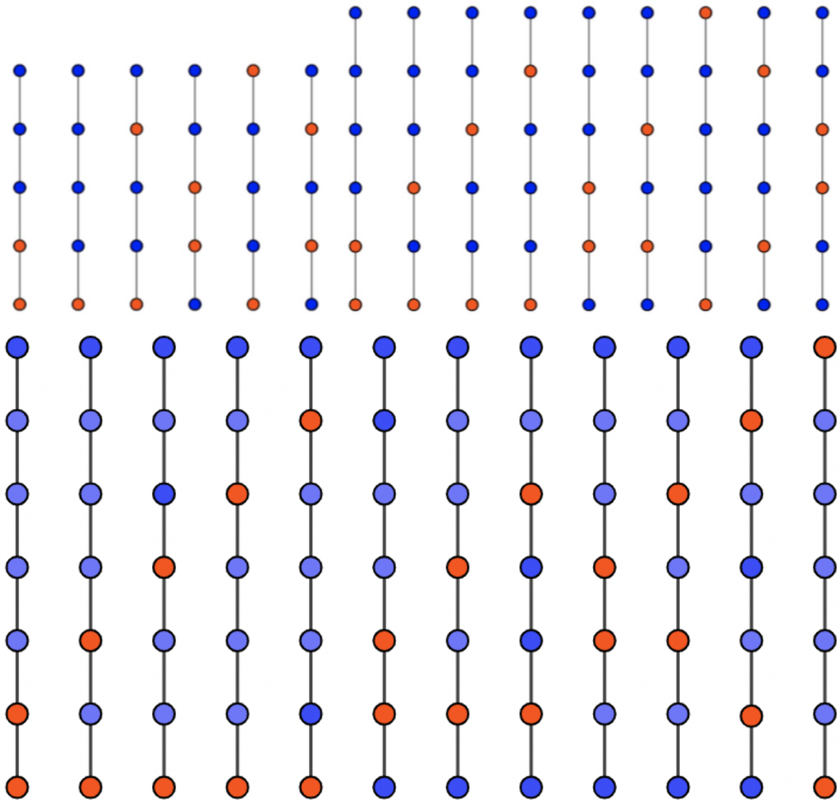
Opmerking 1.
$m_2 = \lfloor m/2 \rfloor$ is het tot een geheel getal afgeronde resultaat van $m/2$. Deze notatie zal vaak gebruikt worden in dit boekje. Zo is ook $p_2 = \lfloor p/2 \rfloor$ en zo voort.
Opmerking 2.
We kunnen $a(1,m,1)$ natuurlijk ook in m uitdrukken. Dit geeft als formule:

$$\begin{array}{lllll} a(1,m,1) & = & a(1,2m_2+1,1) & = & \frac{1}{2}(m+1) \quad m \text{ is oneven} \\ a(1,m,1) & = & a(1,2m_2,1) & = & \frac{1}{2}m \quad\quad\quad\;\; m \text{ is even} \end{array}$$

Opmerking 3.
$a(1,m,1) =$ A004526. Soms zijn er verwijzingen in de vorm A met een nummer van 6 cijfers. Dit is dan een verwijzing naar een OEIS-nummer van een rij getallen. OEIS is de afkorting van **the On-line Encyclopedia of Integer Sequences**.

2 stippen op een (m·1)-raster

Het volgende, ook nog niet moeilijke, probleem is een staaf van m punten met twee stippen. We krijgen nu te maken met twee nogal verschillende situaties. De beide stippen kunnen bijvoorbeeld aan één kant van het midden liggen, In dit geval is er een raster met beide stippen aan de andere kant van het midden en hebben we een symmetrische tegenhanger. Beide stippen kunnen ook symmetrisch van elkaar ten opzichte van het midden liggen. Als raster telt deze situatie maar 1 keer mee.



Figuur 1.3:

In figuur 1.3 staan de m bij 1 rasters met 2 stippen voor $m = 5, 6, 7$.
Zo blijkt $a(2,5,1) = 6$, $a(2,6,1) = 9$ en $a(2,7,1) = 12$

Algemene formule voor $a(2, m, 1)$

Als we voor het aantal verschillende rasters alle combinaties van 2 uit m nemen, dan tellen we er een aantal dubbel. We onderscheiden daarom twee soorten combinaties:

- Zelfsymmetrische combinaties, die in tegenstelling tot de volgende maar één keer voorkomen. Bijvoorbeeld het raster met de 2 stippen op begin- en eindpunt. Hier is maar één combinatie voor hetzelfde staafje. Het aantal van deze zelfsymmetrische rasters noemen we $a1$ en is gelijk aan het aantal mogelijkheden m_2 om één van beide punten te kiezen uit bijvoorbeeld de linkerhelft van de staaf. Het andere punt ligt door deze keuze immers vast. Dus $a1 = m_2$.

- Combinaties, die gekoppeld zijn aan een andere gespiegelde combinatie. Bijvoorbeeld: een staaf met stippen op de eerste twee punten is gekoppeld aan de staaf met stippen op de laatste twee punten. Deze twee combinaties tellen als één raster mee. Het aantal van deze asymmetrische rasters noemen we $a2$ en is de helft van alle combinaties van 2 uit m zonder de zelfsymmetrische, ofwel $a2 = \binom{m}{2} - a1$.

Hieruit volgt dat $a(2,m,1) = a2 + a1 = \frac{1}{2}(\binom{m}{2} - a1) + a1 = \frac{1}{2}(\binom{m}{2} + a1)$.
Voor even en oneven m krijgt de formule de volgende vormen:
Voor oneven $m = 2m_2 + 1 \Leftrightarrow m_2 = \frac{1}{2}(m-1)$ volgt
$a(1,m,1) = \frac{1}{2}(\frac{m(m-1)}{2\cdot 1} + \frac{1}{2}(m-1)) = \frac{1}{4}(m-1)(m+1) = \frac{1}{4}(m^2-1) = m_2^2 + m_2$
en voor even $m = 2m_2$ volgt
$a(1,m,1) = \frac{1}{2}(\frac{m(m-1)}{2\cdot 1} + \frac{1}{2}m) = \frac{1}{4}m(m-1+1) = \frac{1}{4}m^2 = m_2^2$
Samengevat:

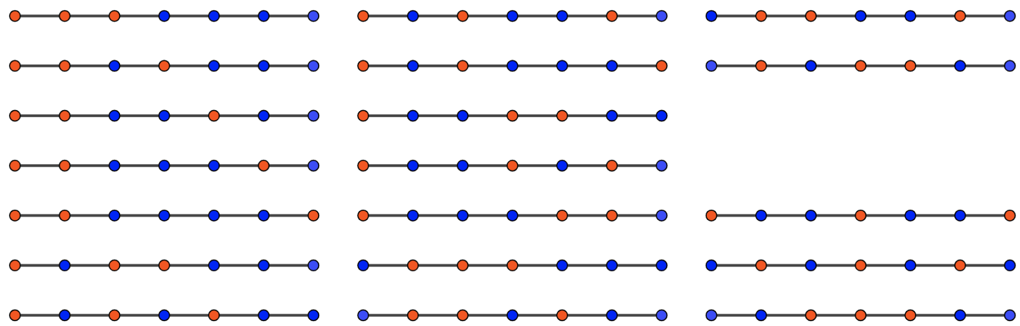
$$\begin{array}{llclclcl} 2o1 & a(2,m,1) & = & \frac{1}{2}(\binom{m}{2} + m_2) & = & \frac{1}{4}(m^2-1) & = & m_2^2 + m_2 \\ 2e1 & a(2,m,1) & = & \frac{1}{2}(\binom{m}{2} + m_2) & = & \frac{1}{4}m^2 & = & m_2^2 \end{array}$$

Ter afkorting staat bij de formules voortaan een code zoals 2o1. Hiermee wordt iets aangeduid betreffende de waarde van p, m en n respectievelijk. De aanduiding is de echte waarde, zoals hier 2 en 1, of een o of e het oneven of even zijn van de waarde, zoals hier van m.

Opmerking: $a(2,(,1) = A076921$ en vanaf de derde term is het de rij $A002620$

3 stippen op een (m·1)-raster

Het even-oneven zijn van p, m manifesteert zich wederom op een andere manier. Van de drie stippen kan er één samenvallen met het middelste punt van de staaf. Bij 2 stippen op een (m·1)-raster speelde het even/oneven zijn van m geen rol. Een eventueel middelste punt heeft dan niet met symmetrische combinaties te maken.
Nemen we eerst $m = 7$. De zelfsymmetrische combinaties bestaan nu uit 1 stip, die samenvalt met het middelste punt en 1 stip aan de linkerkant, dat gespiegeld is met een punt aan de rechterkant. Hiermee wordt $a1$ gelijk aan de helft van $7 - 1$ en dat is 3. Het restant van de $\binom{7}{3} = 35$ combinaties komt weer in gelijke paren als een raster voor. Dus $a2 = (35 - 3)/2 = 16$ en $a(3, 7, 1) = a1 + a2 = 3 + 16 = 19$. Deze 19 rasters zijn getekend in figuur 1.4



Figuur 1.4:

Opmerking.
Bij drie stippen moet voor zelfsymmetrie één van de drie stippen met het midden samenvallen. Bij 3 stippen op een staaf van 8 punten zijn daarom geen zelfsymmetrieen aanwezig en is $a(3, (8, 1)) = \frac{1}{2}\binom{8}{3} = 28$.

p stippen op een m bij 1 raster

Uit het voorgaande blijkt dat het aantal zelfsymmetrieën afhangt van het even of oneven zijn van de getallen p en m. Daarom de volgende vier gevallen:

- $m = 2m_2 + 1$ is oneven en $p = 2p_2 + 1$ is oneven.
  Het middelste gemarkeerde punt zal moeten samenvallen met het mid-

delste van de m punten. De formule wordt:

$$\text{(oo1) } a(p,m,1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{p} + \binom{m_2}{p_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\binom{2m_2+1}{2p_2+1} + \binom{m_2}{p_2}\right)$$

- $m = 2m_2 + 1$ is oneven en $p = 2p_2$ is even.
  De zelfsymmetrische combinaties kunnen geen gemarkeerd punt in het midden hebben. De formule wordt:

$$\text{(eo1) } a(p,m,1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{p} + \binom{m_2}{p_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\binom{2m_2+1}{2p_2} + \binom{m_2}{p_2}\right)$$

- $m = 2m_2$ is even and $p = 2p_2 + 1$ is oneven. Omdat p oneven is moet bij zelfsymmetrie het middelste gemarkeerde punt met het middelste van alle punten samenvallen. Bij gebrek aan dat laatste middelste punt bij even m wordt de formule bij gebrek aan zelfsymmetrie:

$$\text{(oe1) } a(p,m,1) = \frac{1}{2}\binom{m}{p} = \frac{1}{2}\binom{2m_2}{2p_2+1}$$

- $m = 2m_2$ is even en $p = 2p_2$ is even.
  Bij gebrek aan middelste punten moet bij zelfsymmetrie de helft van de gemarkeerde punten bij de linkerhelft van alle punten voorkomen. De formule wordt:

$$\text{(ee1) } ap,(m,1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{p} + \binom{m_2}{p_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\binom{2m_2}{2p_2} + \binom{m_2}{p_2}\right)$$

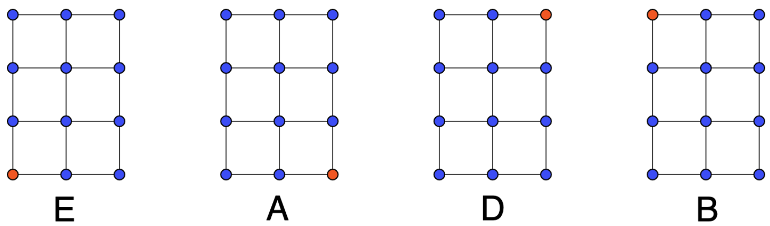
Hoofdstuk 2

Groepen en Dekpunten

In dit hoofdstuk geven we een korte inleiding van het begrip groep en groepswerking op puntenruimten. Eerst worden er enkele meetkundige groepen beschreven. Zoals de symmetriegroep van een rechthoek en van een driehoek. Dan volgen enkele algemene eigenschappen van groepen en ondergroepen. Vervolgens enkele wiskundige systemen waar groepsstructuren een belangrijke rol spelen. In het laatste deel van dit hoofdstuk de banenvergelijking van Frobenius, die een direct verband heeft met aantallen rasters.

Enkele meetkundige groepen.

De symmetriegroep van een rechthoek.



Figuur 2.1: Viergroep {E,A,D,B}

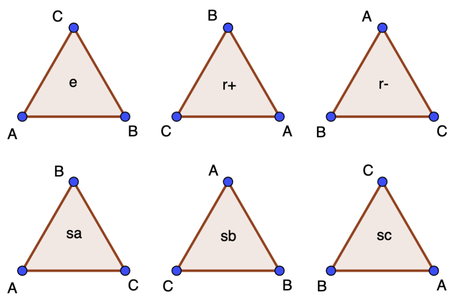
In de figuur zien we vier mogelijke posities van een rooster van 3 bij 4 punten, waarvan één hoekpunt is gemarkeerd. Om van E naar A te komen moeten we

spiegelen in de vertikale as. We noemen deze afbeelding a. Om van E naar B te komen spiegelen we in de horizontale as. We noemen deze afbeelding b. Om van E naar D te komen moeten we draaien over 180°. We noemen deze afbeelding d. Tenslotte om van E naar E te komen moeten we niets doen. We noemen deze afbeelding e.
We kunnen ook van A naar B gaan. Dit is de afbeelding d. We noteren dit met $d(A) = B$
Het toepassen van twee afbeeldingen na elkaar noteren we met a·b. We spreken hierbij af dat we eerst b en daarna a toepassen. We noteren dit met (a·b)(A) = a(b(A)) = a(D) = B. of ook abA = aD = B. Wie goed oplet merkt dadelijk op dat van A naar B ook gelijk is aan de draaiing d. Het blijkt dus dat a·b = d. Voor elk tweetal afbeeldingen kunnen we de samenstelling berekenen. We vatten de resultaten samen in een tabel. Controleer dat a·b met a in de voorkolom en b in de bovenste rij inderdaad als samenstelling d geeft.

Tabel 2.1: Viergroep {e,a,b,d}

	e	a	b	d
e	e	a	b	d
a	a	e	d	b
b	b	d	e	a
d	d	b	a	e

De symmetriegroep van een gelijkzijdige driehoek.



Figuur 2.2: D3

Een gelijkzijdige driehoek kan in zes verschillende manieren gedraaid en gespiegeld worden. Zie de figuur. We noemen de verschillende standen
e is de identieken afbeelding.
r+ is de draaiing, 1 slag tegen de wijzers van de klok in.
r- is de draaiing, 1 slag met de wijzers van de klok mee.
sa, sb en sc zijn de respectievelijke spiegelingen, waarbij A, B en C op hun plaats blijven.
Evenals in het vorige voorbeeld, kan ook hier de groepstabel gemaakt worden:

Tabel 2.2: D3

	e	r+	r-	sa	sb	sc
e	e	r+	r-	sa	sb	sc
r+	r+	r-	e	sc	sa	sb
r-	r-	e	r+	sb	sc	sa
sa	sa	sb	sc	e	r+	r-
sb	sb	sc	sa	r-	e	r+
sc	sc	sa	sb	r+	r-	re

Basiseigenschappen en definities van groepen

Een groep (G,·) is een verzameling elementen samen met een voorschrift om twee elementen samen te stellen. Zo is in de groep D3 van het laatste voorbeeld $sa \cdot sb = r+$. Deze samenstelling moet aan enkele voorwaarden voldoen:
(G0) $g \in G$ en $h \in G$ dan is ook $g \cdot h \in G$.
(G1) In elke groep G is een element e met de eigenschap $e \cdot g = g \cdot e = g$ voor elk element g van de groep.
(G2) Bij ieder element $g \in G$ is er een element $g^* \in G$ zodat $g \cdot g^* = g^* \cdot g = e$. Bij de afbeeldingsgroepen is er altijd een afbeelding om het resultaat ongedaan te maken.
(G3) Voor elk drietal elementen $f, g, h \in G$ geldt $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.
(G4) Als in een groep voor elk tweetal elementen $g, h \in G$ geldt dat $g \cdot h = h \cdot g$ dan is de groep commutatief. We noemen zo'n groep een Abelse groep.

Opmerking 1.
De viergroep van het eerste voorbeeld is een abelse groep. In de tabel is dit snel te zien door de symmetrie in de diagonaal. De groep D3 van het tweede voorbeeld is niet abels. Bijvoorbeeld is $sa \cdot sb \neq sb \cdot sa$.
Opmerking 2.
Groepen zijn verder niets bijzonders. Ze komen overal voor, als er maar enige structuur is. Om er even enkele te noemen:

- $(\mathbb{Z}, +)$ is de groep van de gehele getallen, met als samenstelling de gewone optelling. Het altijd kunnen optellen en aftrekken veroorzaakte zelfs de ontdekking van nul en negatieve getallen zodat de verzameling gehele getallen een groep werd.
- $(\mathbb{Q}^+, \times)$ is de groep van de positieve breuken, met als samenstelling de gewone vermenigvuldiging. Het altijd kunnen vermenigvuldigen en delen bracht de ontdekking van de breuken. Merk op dat $(\mathbb{Z}, \times)$ geen groep is. Er is niet voldaan aan (G2), want er is geen geheel getal z, zodat $2 \times z = 1$.
- S_4 is de permutatiegroep van 4 elementen, bijvoorbeeld de letters (a,b,c,d).
- Diverse symmetriegroepen van min of meer regelmatige figuren, waarvan we er vele zullen tegenkomen.

De groep $\mathbf{S}_4$

We kunnen de elementen van deze groep weergeven door de 24 permutaties van de letters a,b,c,d.

$$\begin{pmatrix} abcd & abdc & acbd & acdb & adbc & adcb \\ bacd & badc & bcad & bcda & bdac & bdca \\ cabd & cadb & cbad & cbda & cdab & cdba \\ dabc & dacb & dbac & dbca & dcab & dcba \end{pmatrix}$$

Uitgaande van de standaardvolgorde abcd kunnen we linksboven identificeren met de eenheidsafbeelding. In cykelnotatie krijgen we dan de volgende afbeeldingen:

$$\begin{pmatrix} id & (cd) & (bc) & (bcd) & (bdc) & (bd) \\ (ab) & (ab)(cd) & (abc) & (abcd) & (abdc) & (abd) \\ (acb) & (acdb) & (ac) & (acd) & (ac)(bd) & (acbd) \\ (adcb) & (adb) & (adc) & (ad) & (adbc) & (ad)(bc) \end{pmatrix}$$

- De bovenste rij $\wr A$ is gemakkelijk te identificeren met de groep $S_3 = D3$ van permutaties van de letters (b,c,d) of van de driehoek bcd. Een deel van een groep, dat op zichzelf een groep is, heet ondergroep. Notatie $\wr A \subset S_4$. Er zijn vier van deze groepen. Voor elke letter die ontbreekt is er zo'n groep van 6 elementen.

- $\{id, (ab), (cd), (ab)(cd)\}$ is ook een ondergroep van S_4. Deze ondergroep is isomorf met de reeds bekende viergroep. De andere viergroepen binnen S_4 zijn $\{id, (ac), (bd), (ac)(bd)\}$ en $\{id, (ad), (bc), (ad)(bc)\}$

- De orde van een element is het aantal keer dat je een element achter elkaar moet toepassen om het resultaat nietsdoen of **identieke afbeelding** te verkrijgen. Zo is de orde van een spiegeling gelijk aan 2. In een viergroep is de orde van e gelijk aan 1, en de orde van de elementen a,b,d steeds gelijk aan 2.

- Elk element brengt een groep voort door dit element achter elkaar toe te passen totdat het element e bereikt wordt. Zo is de groep (e, g, g^2, g^3, enz.) de door g voortgebrachte ondergroep. Kies voor g het element (abcd). Dan is g^2 $= (ac)(bd)$ en $g^3 = (adcb)$ en g^4 = id. Deze groep is blijkbaar een andere groep van vier elementen als de viergroep, de groep van de rechthoek.

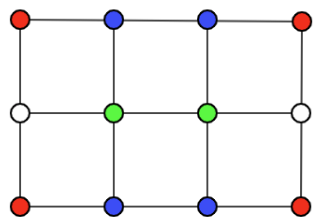
Ondergroepen en nevenklassen

- We bekijken de groep $\mathbb{Z}_{12}$, de zogenaamde groep van de restklassen modulo 12. Denk aan de klok met 12 uren. De elementen worden aangegeven met $\{\overline{0}, \cdots, \overline{11}\}$. Optellen gaat als volgt: eerst optellen, daarna de restklasse modulo 12 bepalen. Dus $\overline{3} + \overline{5} = \overline{3+5} = \overline{8}$ en $\overline{9} + \overline{5} = \overline{9+5} = \overline{14} = \overline{2}$.
  De groep $\mathbb{Z}_{12}$ kent een aantal ondergroepen, bijvoorbeeld H $=$ $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$, voortgebracht door $\overline{3}$.

- We definieren nu het begrip **nevenklasse** in een groep ten opzichte van een ondergroep. In G=$\mathbb{Z}_{12}$ doen we dit als volgt voor het element g. De nevenklasse van g ten opzichte van H bestaat uit de elementen $\{g + h, h \in H\}$. Op deze manier heeft G ten opzichte van H de nevenklassen $\{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{10}\}$ en $\{\overline{2}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{11}\}$. Algemeen wordt de verzameling van nevenklassen aangegeven met G/H. Het is niet toevallig, dat een nevenklasse evenveel elementen als de ondergroep bevat.

- Deze algemene stelling staat bekend als de **stelling van Lagrange**. Het bewijs maakt gebruik van de eigenschap, dat het verschil van twee elementen in een nevenklasse een element van de ondergroep moet zijn. Een belangrijk gevolg is dat de orde van een ondergroep een deler is van de orde van de gehele groep en dat het aantal nevenklassen, inclusief de ondergroep zelf, gelijk is aan orde(G)/orde(H) of ook $\#(G)/\#(H)$.

Groepswerking en banen van elementen.



Figuur 2.3: Banen $(4 \cdot 3)$

- Als we het rooster $4 \cdot 3$ spiegelen en draaien tot alle standen bereikt zijn, ofwel als we de symmetriegroep erop loslaten, dan worden de rode punten naar rode punten verplaatst. Zo ook de blauwe naar blauwe, de witte naar witte, enzovoort. Er is geen werking van de groep waarbij een punt van kleur verandert. We noemen het groepje groene punten een **baan** onder de werking van de groep. De verschillend gekleurde punten in de figuur vormen verschillende banen.
  Samenvattend. Als we een ruimte X (ons rooster) en een groep G (de symmetriegroep van X) op X laten werken dan is de **baan** van een punt $x \in X$ gelijk aan de verzameling punten punten {gx} voor alle afbeeldingen $g \in G$ of in formule:

$$\text{Baan van x is de puntverzameling } Gx = \{gx : g \in G\} \tag{2.1}$$

- De **stabilisator** G_x van een punt x is de verzameling van alle afbeeldingen, die het punt x op zijn plaats laten. Het is niet moeilijk in te zien, dat G_x een ondergroep is. In het $4 \cdot 3$-raster heeft ieder punt als stabilisator de groep $\{e\}$. In een $5 \cdot 3$-raster heeft het middelpunt de groep $\{e, d\}$ als stabilisator.

- Een belangrijke eigenschap van de stabilisator is het feit dat er een 1-1-relatie is tussen de nevenklassen van G_x en de punten van de baan Gx van het punt x. We noemen dit aantal de **baanlengte** van een punt x. Notatie $\#(Gx)$.
  Immers $gx = hx \Leftrightarrow h^{-1}gx = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow gG_x = hG_x$

- Hieruit volgt: $\#(G_x) \times \#(Gx) = \#(G)$
  of in woorden: voor ieder punt x is het product van de orde van de stabilisator en de baanlengte gelijk aan de orde van de groep.

- Als de banen van de punten x en y een gemeenschappelijk punt hebben dan geldt gx = hy voor element $g, h \in G$. De baan van x is dan gelijk aan $Gx = Ggx = Ghy = Gy$. Twee verschillende banen hebben geen gemeenschappelijk punt. De ruimte X is dus een vereniging van disjuncte banen. Notatie $G \setminus X$.

- We kennen aan ieder punt een gewicht toe, dat gelijk is aan het omgekeerde van de bijbehorende baanlengte. Dan krijgen we de volgende som voor het aantal banen in de banenruimte

$$\#(G \setminus X) = \sum_{x \in X} \frac{1}{\#(Gx)} = \sum_{x \in X} \frac{\#(G_x)}{\#(G)} = \frac{1}{\#(G)} \sum_{x \in X} \#(G_x)$$

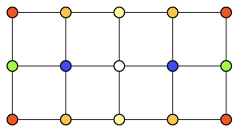
- $\#(G_x) = \sum_{g \in G} \delta_{g,x}$, waarbij $\delta_{g,x} = 1, gx = x$ en $\delta_{g,x} = 0, gx \neq x$ en met verwisselen van de sommatie geldt
  $\sum_{x \in X} \#(G_x) = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G} \delta_{g,x} = \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} \delta_{g,x} = \sum_{g \in G} \chi(g)$
  Deze $\chi(g)$ is precies het aantal dekpunten van de afbeelding g.

- De banenformule wordt nu eenvoudiger

$$\#(G \setminus X) = \sum_{x \in X} \frac{1}{\#(Gx)} = \frac{1}{\#(G)} \sum_{x \in X} \#(G_x) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{g \in G} \#\chi(g)$$

- Bij de stap van roosters naar rasters dient nog opgemerkt te worden, dat een raster met 1 stip feitelijk overeenkomt met de banenruimte van de werking van de viergroep G op het rooster X.

- Voor een raster met drie stippen maken we gebruik definieren we een ruimte, waarin de punten uit drie stippen bestaan. Het voorbeeld van het rooster van 13 bij 10 geeft dan een ruimte weer van $\binom{10 \cdot 13}{3} = 357760$ 3-stips elementen.



Figuur 2.4: Banen $(5 \cdot 3)$

Voorbeeld. De begrippen en formules passen we nog even toe in een 5·3 rooster.

- De ruimte X bestaat uit $5 \cdot 3 = 15$ punten.
- De groep $G = \{e, a, b, d\}$ bestaat uit de afbeeldingen, e is identieke afbeelding, a is spiegelen in de vertikale as, b is spiegelen in de horizontale as en d is draaien in het vlak over 180°.
- Baanlengte van het rode hoekpunt $(2, 1)$, rechtsboven is $\#(G(2, 1)) = 4$, terwijl de baanlengte van het witte middelpunt $(0, 0)$ gelijk is aan $\#(G(0, 0)) = 1$.
- De karakters van de vier afbeeldingen zijn $\chi(e) = \#\{x \in X : ex = e\} = 15$, $\chi(a) = 3$, $\chi(b) = 5$ en $\chi(d) = 1$.
- Het aantal banen $\#(G \setminus X)$ is

$$\frac{1}{\#(G)} \sum_g \chi(g) = \frac{\chi(e) + \chi(a) + \chi(b) + \chi(d)}{4} = \frac{15 + 3 + 5 + 1}{4} = 6 \tag{2.2}$$

Opgave. Geef een formule voor $a(p, m, n)$, voor $p = 1$ en voor $p = 2$.

Hoofdstuk 3

Lineaire rasters

Deel 1 van rasters en roosters gaat over rechthoekige rasters. Strikt genomen zijn roosters met een breedte 1 geen rechthoeken, maar lijnstukken. Omdat de symmetriegroep van lijnstukken, rechthoeken en vierkanten verschillend zijn, worden de rasters ervan in aparte hoofdstukken behandeld.
We beginnen in dit hoofdstuk met een lijnstuk van m punten en markeren er p van. Hierbij is $m > 1$ en $0 \leqq p \leqq m$. Bovendien is $m_2 = \lfloor m/2 \rfloor$ en $p_2 = \lfloor p/2 \rfloor$. Vaak wordt er onderscheid gemaakt tussen het even of oneven zijn van m en p. We geven dit aan met ee(beide even), eo(p even en m oneven), oe(p oneven en m even), oo(beide oneven).

Symmetriegroep De symmetriegroep van een lijnstuk bestaat uit twee afbeeldingen. De identieke afbeelding (id) en de spiegeling (s) in het midden, waarbij begin- en eindpunt verwisselen.

Aantal dekpunten per afbeelding.

- $\chi(id) = \binom{m}{p}$
- (oo) $\chi(s) = \binom{m_2}{p_2}$
- (oe) $\chi(s) = 0$
- (eo) $\chi(s) = \binom{m_2}{p_2}$
- (ee) $\chi(s) = \binom{m_2}{p_2}$

Aantal rasters p,m even en/of oneven

- (oo) $a(p, m, 1) = (\binom{m}{p} + \binom{m_2}{p_2})/2$
- (oe) $a(p, m, 1) = (\binom{m}{p})/2$

- (eo) $a(p,m,1) = (\binom{m}{p} + \binom{m_2}{p_2})/2$
- (ee) $a(p,m,1) = (\binom{m}{p} + \binom{m_2}{p_2})/2$

Na het voorbereidende werk in hoofdstuk 2 is het niet meer echt ingewikkeld om de aantallen $a(p,m,1)$ te vinden. Let er wel op dat door de floor-afbeelding m_2 bij oneven m gelijk is aan $(m-1)/2$ en bij even m gelijk is aan $m/2$. Hierdoor lijken formules soms op elkaar terwijl ze dat in het geheel niet zijn.
Bijvoorbeeld
voor p = 3 en m is even geldt:
$a(p,m,1) = (\binom{m}{3} + \binom{m_2}{1})/2 = (\frac{1}{3}m(m-1)(m-2) + \frac{1}{2}m)/2 =$
$(\frac{1}{3}m^3 - m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{1}{2}m)/2 = \frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{7}{12}m$
voor p = 3 en m is oneven geldt:
$a(p,m,1) = (\binom{m}{3} + \binom{m_2}{1})/2 = (\frac{1}{3}m(m-1)(m-2) + \frac{1}{2}(m-1))/2 =$
$(\frac{1}{3}m^3 - m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{1}{2}m - \frac{1}{2})/2 = \frac{1}{6}m^3 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{7}{12}m - \frac{1}{4}$

Hierover en over de verzameling getallen $\{a(p,m,1)\}$ meer in het laatste hoofdstuk.

Hoofdstuk 4

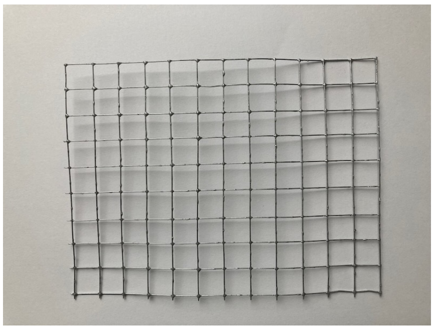
Rechthoekige rasters

In dit hoofdstuk komen de rechthoekige rasters in strikte zin aan de beurt. De vierkanten komen in het volgende hoofdstuk. Door de (grotere) symmetriegroep van het vierkant zullen er geheel andere zaken aan de orde zijn.
Het gaat nu om de formules voor $a(p, m, n)$, waarbij $m \neq n$, $m > 1$, $n > 1$, $0 \leqq p \leqq m \cdot n$.
Bovendien geldt weer $m_2 = \lfloor m/2 \rfloor$, $n_2 = \lfloor n/2 \rfloor$ en $p_2 = \lfloor p/2 \rfloor$.
Vaak wordt er onderscheid gemaakt tussen het even of oneven zijn van p, m en n. We geven dit aan met drie letters eoe, die respectievelijk iets zeggen over p, m, n. Zo staat eoe voor p is even , m is oneven en n is even.
Om enig inzicht te krijgen in het bepalen van aantallen dekpunten leiden we eerst formules af voor p = 1 en 2. We kiezen m als het aantal punten op een horizontale zijde en n als het aantal punten op een vertikale zijde en gaan er vanuit dat m≠n is.

1 stip op een (m·n) raster $(m \neq n)$

Onafhankelijk van het even of oneven zijn van m en n geldt steeds:

- De ruimte X bestaat uit $m \cdot n$ punten.
- De symmetriegroep is G, bestaande uit de identiteit (e), de spiegeling in de vertikale as (a), de spiegeling in de horizontale as (b), de draaiing (d) over 180°.
- Het aantal dekpunten van de identiteit (e) is $\chi(e) = mn$.



Figuur 4.1: rechthoekig grid van 13 bij 10

- (1ee):$m = 2m_2$ en $n = 2n_2$ zijn beide even.
  Dan liggen er geen punten op de symmetrieassen en het middelpunt van draaiien ontbreekt. Dus is : $\chi(a) = \chi(b) = \chi(d) = 0 \Rightarrow$.
  $a(1, m, n) = \frac{1}{\#(G)} \sum_g \chi(g) = \frac{\chi(e)+\chi(a)+\chi(b)+\chi(d)}{4} = \frac{2m_2 \cdot 2n_2+0+0+0}{4} = m_2 n_2$

- (1eo): $m = 2m_2$ is even en $n = 2n_2 + 1$ is oneven.
  Dan liggen er geen punten op de vertikale symmetrieas en bovendien ontbreekt het draaimiddelpunt. Er liggen wel m punten op de horizontale symmetrieas. Dus is : $\chi(a) = \chi(d) = 0$ en $\chi(b) = m \Rightarrow$
  $a(1, m, n) = a(1, 2m_2, 2n_2 + 1) = \frac{1}{4}(mn + m) =$
  $\frac{1}{4}(2m_2 \cdot (2n_2 + 1) + 2m_2) = \frac{1}{4}(4m_2 n_2 + 4m_2) = m_2 n_2 + m_2$

- (1oe): $m = 2m_2 + 1$ is oneven en $n = 2n_2$ is even.
  Met verwisselen van m en n komt er
  $\chi(b) = \chi(d) = 0$ en $\chi(a) = n \Rightarrow$
  $a(1, m, n) = a(1, 2m_2 + 1, 2n_2)) = \frac{1}{4}(mn + n) =$
  $\frac{1}{4}((2m_2 + 1) \cdot 2n_2 + 2n_2) = \frac{1}{4}(4m_2 n_2 + 4n_2) = m_2 n_2 + n_2$

- (1oo): $m = 2m_2 + 1$ en $n = 2n_2 + 1$ zijn beide oneven.
  Alle punten op beide symmetrieassen zijn aanwezig. Dus is $\chi(a) = n, \chi(b) = m, \chi(d) = 1 \Rightarrow$
  $a(1, m, n) = a(1, (2m_2 + 1, 2n_2 + 1)) = \frac{1}{4}(mn + n + m + 1) =$
  $\frac{1}{4}((2m_2+1)\cdot(2n_2+1)+2n_2+1+2m_2+1+1) = \frac{1}{4}(4m_2 n_2+4n_2+4m_2+4) =$
  $m_2 n_2 + m_2 + n_2 + 1 = (m_2 + 1)(n_2 + 1)$

Samengevat:

$$
\begin{array}{llll}
(1oo) & a(1,m,n) & = m_2n_2 + m_2 + n_2 + 1 & = (m_2+1)(n_2+1) \\
(1oe) & a(1,m,n) & = m_2n_2 + n_2 & = (m_2+1)n_2 \\
(1eo) & a(1,m,n) & = m_2n_2 + k & = m_2(n_2+1) \\
(1ee) & a(1,m,n) & = m_2n_2 &
\end{array}
$$

2 stippen op een m·n raster (m≠n)

Het systeem dekpunten tellen blijft hetzelfde. Alleen wordt het begrip punt vervangen door 2-punt. De ruimte X bestaat nu niet langer uit losse punten, maar uit 2-punten. Het aantal 2-punten is gelijk aan het aantal combinaties van 2 uit (mn) ofwel $\binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1}$. En dit aantal is meteen gelijk aan het karakter $\chi(e)$. De karakters van de andere symmetrieen van X zijn lastiger te bepalen. Daarom bekijken we eerst nog eens het (13·10)-raster.

- De ruimte X bestaat uit alle 2-punten van het rooster, die onder de symmetriegroep van X, de inmiddels welbekende viergroep, de dekpunten van e zijn. We zullen ze voortaan 2-dekpunten noemen.
  $\chi(e) = \binom{13\cdot 10}{2} = \binom{130}{2} = \frac{130\cdot 129}{2\cdot 1} = 8385$.
- Als een 2-punt 2-dekpunt is van de spiegeling in de vertikale as zijn er twee soorten mogelijkheden: (1) beide punten van het 2-dekpunt liggen op de spiegelas of (2) beide punten van het 2-dekpunt zijn elkaars spiegelbeeld. Voor de eerste mogelijkheid is het aantal 2-dekpunten gelijk aan $\binom{10}{2} = 45$. Voor de tweede mogelijkheid wordt elk punt uit het linkerhalfvlak gekoppeld aan zijn spiegelbeeld in het rechterhalfvlak, waarbij de spiegelas niet meetelt. Het aantal van deze 2-dekpunten is $(13-1)/2 \cdot 10 = 60$.
  $\chi(a) = 45 + 60 = 105$.
- Als een 2-punt 2-dekpunt is van de spiegeling in de horizontale as, dan vervalt de mogelijkheid (1). Het aantal 2-dekpunten via mogelijkheid (2) is $5 \cdot 13 = 65$.
  $\chi(b) = 65$.
- Bij de draaiing is er bij elk punt een tweede punt, dat draaisymmetrisch is. Het aantal 2-dekpunt is dus gelijk aan de helft van alle punten of $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65$.
  $\chi(d) = 65$.

- $a(2, 13, 10) = \frac{1}{4}(8385 + 105 + 65 + 65) = 8620/4 = 2155$

Dit kunnen we zonder veel problemen vertalen naar een algemene formule. We onderscheiden 4 gevallen voor m en n.

- (2ee): $m = 2m_2$ en $n = 2n_2$ zijn beide even.
  - $\chi(e) = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}mn(mn-1)$
  - $\chi(a) = \frac{1}{2}mn$
  - $\chi(b) = \frac{1}{2}mn$
  - $\chi(d) = \frac{1}{2}mn$
  - $a(2, m, n) = \frac{1}{4}[\binom{mn}{2} + \frac{3}{2}mn] = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}m^2n^2 - \frac{1}{2}mn + \frac{3}{2}mn] = \frac{1}{8}mn(mn+2)$
- (2eo): $m = 2m_2$ is even en $n = 2n_2 + 1$ is oneven.
  - $\chi(e) = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}(m^2n^2 - mn)$
  - $\chi(a) = \frac{1}{2}mn$
  - $\chi(b) = \binom{m}{2} + \frac{1}{2}m(n-1) = \frac{1}{2}(m^2 - m + mn - m)$
  - $\chi(d) = \frac{1}{2}mn$
  - $a(2, m, n) = [\binom{mn}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2}mn + \binom{m}{2} + \frac{1}{2}m(n-1)]/4 = \frac{1}{8}(m^2n^2 + m^2 + 2mn - 2m)$
- (2oe): $m = 2m_2 + 1$ is oneven en $n = 2n_2$ is even.
  - $a(2, m, n) = \frac{1}{8}(m^2n^2 + n^2 + 2mn - 2n)$
- (2oo) $m = 2m_2 + 1$ en $n = 2n_2 + 1$ zijn beide oneven.
  - $\chi(e) = \binom{mn}{2} = \frac{mn(mn-1)}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}(m^2n^2 - mn)$
  - $\chi(a) = \binom{n}{2} + \frac{1}{2}n(m-1) = \frac{1}{2}(n^2 + mn - 2n)$
  - $\chi(b) = \binom{m}{2} + \frac{1}{2}m(n-1) = \frac{1}{2}(m^2 + mn - 2m)$
  - $\chi(d) = \frac{1}{2}(mn-1)$
  - $a(2, m, n) = \frac{1}{8}(m^2n^2 + m^2 + n^2 + 2mn - 2m - 2n - 1)$

p stippen op een (m·n)-raster

Na de voorbereidende beschouwingen in dit hoofdstuk is het niet moeilijk meer om de algemene formule voor a(p,(m,n)) af te leiden.
Om te beginnen herhaling van enkele vaste notaties.

- $p_2 = \lfloor p/2 \rfloor$, $m_2 = \lfloor m/2 \rfloor$ en $n_2 = \lfloor n/2 \rfloor$
- De symmetriegroep van het rechthoekig rooster wordt beschreven door de viergroep. In het bijzonder is
  - e de identieke afbeelding.
  - a de spiegeling in de vertikale as van lengte n.
  - b de spiegeling in de horizontale as van lengte m.
  - d de draaiing om het middelpunt over 180° in het vlak van de rechthoek.
- Bij de volgende onderverdeling gebruiken we afkortingen als oeo. Met oeo geven aan, dat p, m, n respectievelijk oneven, even en oneven zijn.

- (eee)
  - $\chi(e) = \binom{mn}{p}$
  - $\chi(a) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(b) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}$

$$a(p,m,n) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + 3\binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}\right) \tag{4.1}$$

- (eeo)
  - $\chi(e) = \binom{mn}{p}$
  - $\chi(a) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(b) = \sum_{i=0}^{p_2} \binom{m}{2i}\binom{mn_2}{p_2-i}, i \le m_2$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}$

$$a(p,m,n) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + 2\binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} + \sum_{i=0}^{p_2}\binom{m}{2i}\binom{mn_2}{p_2-i}\right) \tag{4.2}$$

- (eoe)

$$a(p,m,n) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + 2\binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p} + \sum_{i=0}^{p_2}\binom{n}{2i}\binom{m_2n}{p_2-i}\right) \tag{4.3}$$

- (eoo)
  - $\chi(e) = \binom{mn}{p}$
  - $\chi(a) = \sum_{i=0}^{p_2}\binom{n}{2i}\binom{m_2n}{p_2-i}, i \leq n_2$
  - $\chi(b) = \sum_{i=0}^{p_2}\binom{m}{2i}\binom{mn_2}{p_2-i}, i \leq m_2$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}(mn-1)}{\frac{1}{2}p}$

$$a(p,m,n) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{p_2}\binom{n}{2i}\binom{m_2n}{p_2-i} + \sum_{i=0}^{p_2}\binom{m}{2i}\binom{mn_2}{p_2-i} + \binom{\frac{1}{2}mn}{\frac{1}{2}p}\right) \tag{4.4}$$

- (oee)
  - $\chi(e) = \binom{mn}{p}$
  - $\chi(a) = 0$
  - $\chi(b) = 0$
  - $\chi(d) = 0$

$$a(p,m,n) = \frac{1}{4}\binom{mn}{p} \tag{4.5}$$

- (ooe)
  - $\chi(e) = \binom{mn}{p}$
  - $\chi(a) = \sum_{i=0}^{p_2}\binom{n}{2i+1}\binom{m_2n}{p_2-i}$
  - $\chi(b) = 0$
  - $\chi(d) = 0$

$$a(p,m,n) == \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{q}\binom{n}{2i+1}\binom{m_2n}{p_2-i}\right) \tag{4.6}$$

- (oeo)

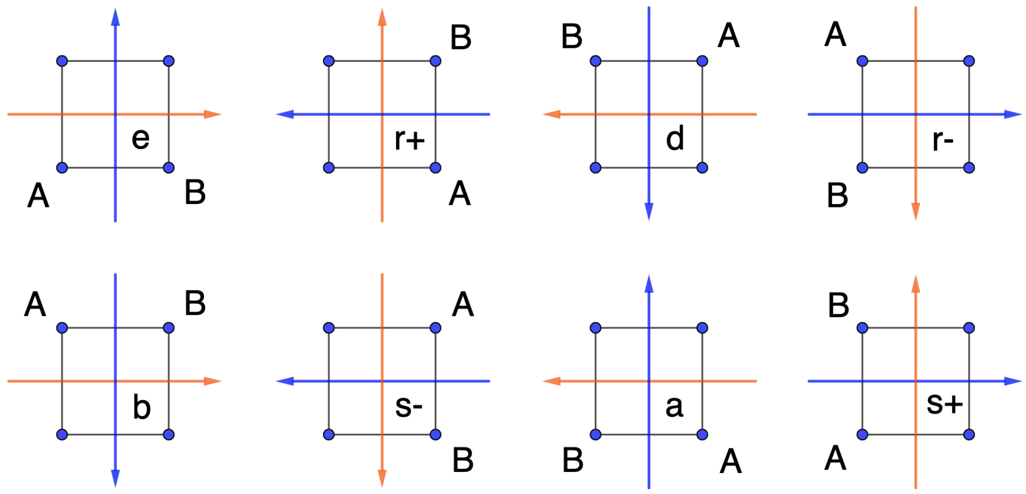
$$a(p,m,n) == \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{q}\binom{m}{2i+1}\binom{mn_2}{p_2-i}\right) \tag{4.7}$$

- (ooo)
  - $\chi(e) = \binom{mn}{p}$
  - $\chi(a) = \sum_{i=0}^{p_2}\binom{n}{2i+1}\binom{m_2n}{p_2-i}$
  - $\chi(b) = \sum_{i=0}^{p_2}\binom{m}{2i+1}\binom{mn_2}{p_2-i}$
  - $\chi(d) = \binom{mn-1}{p-1}$

$$a(p,m,n) = \frac{1}{4}\left(\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{p_2}\binom{n}{2i+1}\binom{m_2n}{p_2-i} + \sum_{i=0}^{p_2}\binom{m}{2i+1}\binom{mn_2}{p_2-i} + \binom{mn-1}{p-1}\right) \tag{4.8}$$

Hoofdstuk 5

Vierkante rasters



Figuur 5.1: vierkantgroep

Dit hoofdstuk gaat over vierkante rasters. In feite is een vierkant een bijzondere rechthoek. Een vierkant heeft meer symmetrie en de viergroep is niet meer toereikend om alle symmetrische afbeeldingen te beschrijven. Daarom eerst iets over de vierkantgroep.
In de figuur herkennen we de afbeeldingen e,a,b,d van de viergroep.
Er zijn bij het vierkant nog twee draaiingen over 90°, waarbij r+,r- respectievelijk in positieve richting (tegen de wijzers van de klok in) en in negatieve richting (met de wijzers van de klok mee) zijn.
Bovendien zijn er nog twee spiegelingen s+,s- in respectievelijk de positief gerichte diagonaal en de negatief gerichte diagonaal.

Voor het aantal vierkante rasters zullen we nu dus moeten zoeken naar de dekpunten van deze acht afbeeldingen. Bovendien zullen we nu rekening moeten houden met het even zijn van p en m. Bij p gaat het niet alleen om het even/oneven zijn, maar zelfs of p een viervoud plus 0 of 1 of 2 of 3 is.

Enkele opmerkingen vooraf.

- De werking van de vierkantgroep verdeelt het vierkant in banen van lengte 1, 4 en 8.
- Wanneer m even is, dan zijn de symmetrie-assen afwezig. Als p=1 dan zijn er alleen 1-punten dekpunt bij de diagonale spiegelingen. Het aantal verschillende grids is dan $a(1,(m,m) = \frac{1}{8}(\binom{m^2}{1} + 2\binom{m}{1}) = \frac{1}{8}(m^2+2m)$
- Omdat de draaiingen over een kwartslag van 90° steeds vier punten nodig heeft in een p-dekpunt kiezen we nu voor p viervouden plus 0, 1, 2, 3 en schrijven $p = 4p_4$, $p = 4p_4 + 1$, $p = 4p_4 + 2$, $p = 4p_4 + 3$.
- Bij de onderverdeling van het vierkante raster met p stippen, gebruiken we de afkortingen 0o, 1o, 2o, 3o, 0e, 1e, 2e, 3e waarbij 1e staat voor $p = 4p_4 + 1$ en $m = 2m_2$ is even.
- (0e)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
  - $\chi(r+) + \chi(r-) = 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}p}$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(a) + \chi(b) = 2 \cdot \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m_2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{\frac{1}{2}(p-2i)}$

$$\frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\cdot\binom{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}p} + 3\cdot\binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p} + 2\cdot\sum_{i=0}^{min(m_2,p/2)}\binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{\frac{1}{2}(p-2i)}\right) \tag{5.1}$$

- (1e)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$

- $\chi(r+) + \chi(r-) = 0$
- $\chi(d) = 0$
- $\chi(a) + \chi(b) = 0$
- $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m_2-1,2p_4} \binom{m}{2i+1} \binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{(p-2i-1)/2}$

$$a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(m_2-1,2p_4} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{(p-2i-1)/2}\right) \tag{5.2}$$

- (2e)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
  - $\chi(r+) + \chi(r-) = 0$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(a) + \chi(b) = 2 \cdot \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p}$
  - $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m_2,p/2)} \binom{m}{2i} \binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{\frac{1}{2}(p-2i)}$

$$a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(m_2-1,2p_4} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{(p-2i-1)/2}\right) \tag{5.3}$$

- (3e)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
  - $\chi(r+) + \chi(r-) = 0$
  - $\chi(d) = 0$
  - $\chi(a) + \chi(b) = 0$
  - $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m2-1,2*p4+1)} \binom{m}{2i+1} \binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}$

$$a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(m2-1,2*p4+1)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}\right) \tag{5.4}$$

- (0o)

- $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
- $\chi(r+) + \chi(r-) = 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}p}$
- $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2}$
- $\chi(a) + \chi(b) = 2 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}$
- $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}$

$$\frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}p} + \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2} + 4 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}\right) \tag{5.5}$$

- (1o)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
  - $\chi(r+) + \chi(r-) = 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{p_4}$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{2p_4}$
  - $\chi(a) + \chi(b) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m2,2*p4)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}$
  - $\chi(s+) + \chi(s+) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m2,2*p4)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}$

$$\frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{p_4} + \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{2p_4} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{min(m2,2*p4)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}\right) \tag{5.6}$$

- (2o)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
  - $\chi(r+) + \chi(r-) = 0$
  - $\chi(d) = \sum_{i=o}^{q} \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2}$
  - $\chi(a) + \chi(b) = 2 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}$
  - $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}$

$$a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + \sum_{i=o}^{q} \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2} + 4 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}\right) \tag{5.7}$$

- (3o)
  - $\chi(e) = \binom{m^2}{p}$
  - $\chi(r+) + \chi(r-) = 0$
  - $\chi(d) = \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{2*p4+1}$
  - $\chi(a) + \chi(b) = 2 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,2*p4+1)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i+1}$
  - $\chi(s+) + \chi(s-) = 2 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,2*p4+1)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i+1}$

$$a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{2*p4+1} + 4 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,2*p4+1} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i+1}\right) \tag{5.8}$$

Formule overzicht

oo1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2} \cdot (\binom{m}{p} + \binom{k}{q})$

oe1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2} \cdot (\binom{m}{p})$

eo1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2} \cdot (\binom{m}{p} + \binom{k}{q})$

ee1 $a(p,m,1) = \frac{1}{2} \cdot (\binom{m}{p} + \binom{k}{q})$

ooo $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{q-i} + \binom{(mn-1)/2}{q})$

ooe $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i+1}\binom{kn}{q-i})$

oeo $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{q-i})$

oee $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot \binom{mn}{p}$

eoo $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i}\binom{kn}{q-i} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i} + \binom{(mn-1)/2}{q})$

eoe $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + 2 \cdot \binom{ml}{q} + \sum_{i=0}^{min(q,l)} \binom{n}{2i}\binom{kn}{q-i})$

eeo $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + 2 \cdot \binom{kn}{q} + \sum_{i=0}^{min(q,k)} \binom{m}{2i}\binom{ml}{q-i})$

eee $a(p,m,n) = \frac{1}{4} \cdot (\binom{mn}{p} + 3 \cdot \binom{2kl}{q})$

0o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{\frac{1}{4}p} + \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2} + 4 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}\right)$

1o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}(m^2-1)}{p_4} + \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{2p_4} + 4 \cdot \sum_{i=0}^{min(m2,2*p4)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i}\right)$

2o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + \sum_{i=o}^{q} \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{p/2} + 4 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}\right)$

3o $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + \binom{\frac{1}{2}(m^2-1)}{2*p4+1} + 4 \cdot \sum_{i=o}^{min(m2,2*p4+1} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4-i+1}\right)$

0e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2 \cdot \binom{\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}p} + 3 \cdot \binom{\frac{1}{2}m^2}{\frac{1}{2}p} + 2 \cdot \sum_{i=0}^{min(m_2,p/2)} \binom{m}{2i}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{\frac{1}{2}(p-2i)}\right)$

1e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(m_2-1,2p_4} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{(p-2i-1)/2}\right)$

2e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(m_2-1,2p_4} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{(p-2i-1)/2}\right)$

3e $a(p,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{p} + 2\sum_{i=0}^{min(m2-1,2*p4+1)} \binom{m}{2i+1}\binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{2p_4+1-i}\right)$

Hoofdstuk 6

Priemgetallen in de verzameling a(p,m,n)

Bij het zoeken naar een verband tussen p,m,n en a zijn er bijzonderheden over priemgetallen naar voren gekomen. is er met name gelet op het voorkomen van priemgetallen in de waardenverzameling van a(p,m,n). In dit hoofdstuk zal $\mathfrak{p}$ een priemgetal voorstellen. In dit laatste hoofdstuk is slechts een eerste aanzet. Het lijkt er op dat priemgetallen spaarzaam voorkomen, als m of n even zijn en groter dan 2. Als m en n beide oneven zijn, komen er enkele of misschien oneindig veel priemgetallen voor.
Bij vierkante roosters in de laatste paragraaf lijkt de rij priemgetallen 2, 3, 23, 1051 als begin te hebben. Met een beetje zoeken zijn er nog twee andere priemgetallen gevonden. Een van 19 en een van 49 cijfers. Of er ook nog tussenliggende of grotere priemgetallen is voorlopig een vraag.
Ook enkele rijen uit de OEIS zijn gevonden.
Ook een verwijzing naar priemgetallen genererende veeltermen is gemaakt.

p = 1

lineaire rasters .

- (1o1):
  $a(1,m,1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{1} + \binom{m_2}{0}\right) = \frac{1}{2}(m+1)$
- (1e1): $a(1,m,1) = \frac{1}{2}\binom{m}{1} = \frac{1}{2}m$
- Gecombineerd volgt uit 1o1 en 1e1 voor $a(1,m,1)$ de rij $1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,\cdots(m = 1,2,\cdots)$. Deze rij is bekend als A004526

- Voor elk geheel getal $z \in \mathbb{Z}$ zijn er twee oplossingen voor $a(1, m, 1) = z$. Namelijk $\{2z - 1, 2z\}$.
- a(1,m,1) is priem, als $(m = 2\mathfrak{p} \vee m = 2\mathfrak{p} - 1)$.

rechthoekige rasters .

- (1oo):
  $a(1, m, n) = \frac{1}{4}(mn + n \cdot 1 + m \cdot 1 + 1) = \frac{1}{4}(m + 1)(n + 1)$
- (1oe):
  $a(1, m, n) = \frac{1}{4}(mn + n \cdot 1) = \frac{1}{4}(m + 1)n$
- (1eo):
  $a(1, m, n) = \frac{1}{4}m(n + 1)$
- (1ee):
  $a(1, m, n) = \frac{1}{4}mn$
- $a(1, m, 2)$ is priem voor $m = 2\mathfrak{p} \vee m = 2\mathfrak{p} - 1$.
  Bewijs.
  (1) Als m even is, dan $a(1, m, 2) = \frac{1}{2}m$ en dus $a(1, m, 2) = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m = \mathfrak{p} \Leftrightarrow m = 2\mathfrak{p}$
  (2) Als m oneven is, dan $a(1, m, 2) = \frac{1}{2}(m + 1)$ en dus $a(1, m, 2) = \mathfrak{p} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + 1) = \mathfrak{p} \Leftrightarrow m = 2\mathfrak{p} - 1$

vierkante rasters .

- (1o):
  $a(1, m, m) = \frac{1}{8}\left(m^2 + 2 + 1 + 4m\right) = \frac{1}{8}(m + 1)(m + 3)$
- (1e):
  $a(1, m, m) = \frac{1}{8}(m^2 + 2 \cdot m) = \frac{1}{8}m(m + 2)$
- Gecombineerd volgt uit 1o en 1e voor $a(1, m, m)$ de rij $1, 1, 3, 3, 6, 6, 10, 10, 15, 15, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.
  Deze rij is bekend als A008805, driehoeksgetallen herhaald.
- Alle waarden van a(1,m,m) zijn samengesteld, behalve de waarde 1 en 3 aan het begin van de rij. 3 is het enige priemgetal in de waardenverzameling van a(1,m,m).

- Gecombineerd volgt de volgende tabel voor $p = 1$:
- In de tabel is de rij A004526 ook voor $m = 2$ en $n = 2$ te vinden. Als diagonale rij vinden we A008805.

Tabel 6.1: p = 1

n\ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
3	2	2	3	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16
4	2	2	4	3	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14	16
5	3	3	6	6	6	9	12	12	15	15	18	18	21	21	24
6	3	3	6	6	9	6	12	12	15	15	18	18	21	21	24
7	4	4	8	8	12	12	10	16	20	20	24	24	28	28	32
8	4	4	8	8	12	12	16	10	20	20	24	24	28	28	32
9	5	5	10	10	15	15	20	20	15	25	30	30	35	35	40
10	5	5	10	10	15	15	20	20	25	15	30	30	35	35	40
11	6	6	12	12	18	18	24	24	30	30	21	36	42	42	48
12	6	6	12	12	18	18	24	24	30	30	36	21	42	42	48
13	7	7	14	14	21	21	28	28	35	35	42	42	28	49	56
14	7	7	14	14	21	21	28	28	35	35	42	42	49	28	56
15	8	8	16	16	24	24	32	32	40	40	48	48	56	56	36

- Alleen voor $\{m = 1, 2 \vee n = 1, 2 \vee m = n = 3, 4\}$ vinden we priemgetallen als waarde van $a(1, m, n)$.
- Verder volgt gemakkelijk uit de formules dat $a(1, m, n) = a(1, m, 1) \cdot a(1, 1, n)$ voor $m \neq n$.

p = 2

lineaire rasters .

- (2o1):
  $a(2, m, 1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{2} + \binom{(m-1)/2}{1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m-1}{2}\right) =$
  $\frac{1}{4}(m^2 - m + m - 1) = \frac{1}{4}(m-1)(m+1)$
- (2e1):
  $a(2, m, 1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{2} + \binom{m/2}{1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m}{2}\right) =$
  $\frac{1}{4}(m^2 - m + m) = \frac{1}{4}m^2$
- Gecombineerd volgt uit 2o1 en 2e1 voor $a(2, m, 1)$ de rij $0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.

Deze rij is bekend als A002620

- 2 is het enige priemgetal in de rij.

rechthoekige rasters .

- (2oo):
  $a(2,m,n) = \frac{1}{8}\left(m^2n^2 + m^2 + n^2 + 2mn - 2m - 2n - 1\right)$
- (2oe):
  $a(2,m,n) = \frac{1}{8}(m^2n^2 + 2mn + n^2 - 2n)$
- (2eo):
  $a(2,m,n) = \frac{1}{8}(m^2n^2 + 2mn + m^2 - 2m)$
- (2ee):
  $a(2,m,n) = \frac{1}{8}(m^2n^2 + 2mn)$

vierkante rasters .

- (2o):
  $a(p,m,m) = \frac{1}{16}(m^4 + 8m^2 - 8m - 1)$
- (2e):
  $a(2,m,m) = \frac{1}{16}(m^4 + 6m^2 - 4m)$
- Gecombineerd volgt uit 2o en 2e voor $a(2,m,m)$ de rij $0, 2, 8, 21, 49, 93, 171, 278, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.
  Deze rij is bekend als A014409.
- 2 is het enige priemgetal in de rij.

tabel van a(2,m,n) voor $m > 0, n > 0$.

- Gecombineerd volgt de volgende tabel voor $p = 2$:
- Voor $m = 2$ en $n = 2$ staat in de tabel een rij, die voor de begintermen overeenkomt met A186783. Als de 2 op de diagonaal zou een 3 was, dan is het de rij van driehoeksgetellen A000217.

p = 3

lineaire rasters .

- (3o1)
  $a(3,m,1) = \frac{1}{2}\left(\binom{m}{3} + \binom{m/2}{1}\right) = \frac{1}{12}\left(m(m-1)(m-2) + 3m\right) = \frac{1}{12}\left(m^3 - 3m^2 + 5m\right)$

Tabel 6.2: a(2,m,n)

n\ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	1
1	0	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	5
2	1	2	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	1
3	2	6	8	22	34	48	65	84	106	130	157	186	218	252	2
4	4	10	22	21	56	78	106	136	172	210	254	300	352	406	4
5	6	15	34	56	49	123	168	216	274	335	406	480	564	651	7
6	9	21	48	78	123	93	234	300	381	465	564	666	783	903	10
7	12	28	65	106	168	234	171	412	524	640	777	918	1080	1246	14
8	16	36	84	136	216	300	412	278	672	820	996	1176	1384	1596	18
9	20	45	106	172	274	381	524	672	446	1045	1270	1500	1766	2037	23
10	25	55	130	210	335	465	640	820	1045	660	1550	1830	2155	2485	28
11	30	66	157	254	406	564	777	996	1270	1550	970	2226	2622	3024	34
12	36	78	186	300	480	666	918	1176	1500	1830	2226	1347	3096	3570	41
13	42	91	218	352	564	783	1080	1384	1766	2155	2622	3096	1863	4207	48
14	49	105	252	406	651	903	1246	1596	2037	2485	3024	3570	4207	2471	55
15	56	120	289	466	748	1038	1433	1836	2344	2860	3481	4110	4844	5586	32

- (3e1):
  $a(3,m,1) = \frac{1}{2}\binom{m}{3} = \frac{1}{12}m(m-1)(m-2) =$
  $\frac{1}{12}\left(m^3 - 3m^2 + 2m\right)$
- Gecombineerd volgt uit 1o1 en 1e1 voor $a(1,m,1)$ de rij $0, 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, 36, 42, 49, 56, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.
  Deze rij is bekend als A002620
- 2 is het enige priemgetal in de rij.

rechthoekige rasters .

- (3oo):
  $a(3,m,n) = \frac{1}{4}\cdot\left(\binom{mn}{3} + \sum_{i=0}^{1}\binom{n}{2i+1}\binom{kn}{1-i} + \sum_{i=0}^{1}\binom{m}{2i+1}\binom{ml}{1-i} + \binom{(mn-1)/2}{1}\right) =$

  $\frac{1}{24}\cdot(m^3n^3 - 3m^2n^2 + m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 - 6m^2 + 5mn -$
  $6n^2 + 2m + 2n - 3)$
- (3oe):
  $a(3,m,n) = \frac{1}{4}\cdot\left(\binom{mn}{3} + \sum_{i=0}^{1}\binom{n}{2i+1}\binom{kn}{1-i}\right) =$
  $\frac{1}{24})\cdot n\cdot(m^3n^2 - 3m^2n + 3mn + n^2 + 2m - 6n + 2)$

- (3eo):
  $a(3,m,n) = \frac{1}{4} \cdot \left(\binom{mn}{3} + \sum_{i=0}^{1} \binom{m}{2i+1}\binom{ml}{1-i}\right) =$
  $\frac{1}{24} \cdot m \cdot (m^2n^3 - 3mn^2 + m^2 + 3mn - 6m + 2n + 2)$
- (3ee):
  $a(3,m,n) = \frac{1}{4} \cdot \binom{mn}{3} =$
  $\frac{1}{24} \cdot n \cdot m \cdot (mn-2) \cdot (mn-1)$

vierkante rasters .

- (3o):
  $a(3,m,m) = \frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{3} + \binom{(m^2-1)/2}{1} + 4 * (\binom{m}{1} * \binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{1} + \binom{m}{3} * \binom{\frac{1}{2}(m^2-m)}{0})\right) =$

  $\frac{1}{48}(m^6 - 3m^4 + 16m^3 - 19m^2 + 8m - 3) =$
  $\frac{1}{48}(m-1)(m^5 + m^4 - 2m^3 + 14m^2 - 5m + 3)$
- (3e):
  $\frac{1}{8}\left(\binom{m^2}{3} + 2 * [\binom{m}{1} * \binom{(m^2-m)/2}{1} + \binom{m}{3} * \binom{(m^2-m)/2}{0}]\right)$
  $\frac{1}{48}(m^6 - 3m^4 + 8m^3 - 10m^2 + 4m) =$
  $\frac{1}{48}m(m-1)(m^2 - m + 2)(m^2 + 2m - 2)$
- Gecombineerd volgt uit 3o en 3e voor $a(1,m,m)$ de rij $0, 0, 1, 16, 77, 319, 920, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.
  Deze rij is bekend als A082966.
- Bij de eerste 1000000 getallen in de rij zit geen priemgetal.

tabel van a(3,m,n) voor $m > 0, n > 0$.

- Tabel van $a(3,m,n)$

p = 4

lineaire rasters .

- (4o1):
  $a(4,m,1) = \frac{1}{48} \cdot (m-3) \cdot (m-1) \cdot (m^2 - 2m + 3)$
- (4e1):
  $a(4,m,1) = \frac{1}{48} \cdot (m-2) \cdot m \cdot (m^2 - 4m + 6)$

Tabel 6.3: $a(3,m,n)$

n\ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	2	6	10	19	28	44	60
2	0	1	6	14	32	55	94	140	208	285
3	1	6	16	60	129	218	363	536	785	1070
4	2	14	60	77	294	506	832	1240	1802	2470
5	6	32	129	294	319	1038	1695	2516	3642	4980
6	10	55	218	506	1038	920	2902	4324	6242	8555
7	19	94	363	832	1695	2902	2397	6992	10075	13790
8	28	140	536	1240	2516	4324	6992	5278	14988	20540
9	44	208	785	1802	3642	6242	10075	14988	10874	29500
10	60	285	1070	2470	4980	8555	13790	20540	29500	20355

- Gecombineerd volgt uit 4o1 en 4e1 voor $a(4,m,1)$ de rij $1, 3, 9, 19, 38, 66, 110, 170, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.
  Deze rij is bekend als A005994
- 3 en 19 zijn enige priemgetallen in de rij voor $m < 10000000$.

rechthoekige rasters .

- (4oo):
  $a(4,m,n) = \left(\frac{1}{96}\right) \cdot (m^4n^4 - 6m^3n^3 + 6m^3n + 20m^2n^2 + 6mn^3 - 6m^3 - 12m^2n - 12mn^2 - 6n^3 + 21m^2 - 30mn + 21n^2 - 6m - 6n + 9)$
- De irreduciebele veelterm van 4oo geeft priemgetallen, vermoedelijk oneindig veel priemgetallen. Voor een aantal kleine waarden van m en n is a(4,m,n) een priemgetal. Bijvoorbeeld $a(4,m,n) = (5,1,3), (7,1,19), (7,7,53381), (11,5,85933), (27,5,3318929)$.
- Een inleiding tot de theorie van priemgetallen voortbrengende veeltermen is te vinden in o.a. Madieyna Diouf: Prime-Generating Polynomial en Luca Goldoni: Prime numbers and polynomials.
- (4oe):
  $a(4,m,n) = \frac{1}{96} \cdot n \cdot (m^4n^3 - 6m^3n^2 + 20m^2n + 6mn^2 - 12mn - 6n^2 - 24m + 21n - 6)$
- Er is voor $(m,n) = (3,4)$ een priemgetal 139. Voor $m, n < 5000$ zijn er geen verdere priemgetallen.
- (4eo):

$a(4,m,n) = \frac{1}{96} \cdot m \cdot (m^3n^4 - 6m^2n^3 + 6m^2n + 20mn^2 - 6m^2 - 12mn + 21m - 24n - 6)$

- 4ee$\rightarrow$
  $\left(\frac{1}{96}\right) \cdot n \cdot m \cdot (mn-2) \cdot (m^2n^2 - 4mn + 12)$
- Geen priemgetallen gevonden voor $m, n < 5000$.

vierkante rasters .

- (4o):
  $a(4,m,m) = \left(\frac{1}{192}\right) \cdot (m-1)^2 \cdot (m^6 + 2m^5 - 3m^4 - 8m^3 + 41m^2 - 6m - 3)$.
- (4e):
  $a(4,m,m) = \left(\frac{1}{192}\right) \cdot m^2 \cdot (m^6 - 6m^4 + 40m^2 - 48m + 16)$
- Gecombineerd volgt uit 4o en 4e voor $a(4,m,m)$ de rij $0, 1, 23(m = 3), 252, 1666, 7509, 26865, \cdots (m = 1, 2, \cdots)$.
- 23 is het enige priemgetal in de rij voor $m < 1000000$.

Enkele waarden van $a(p,m,m)$
Voor $1 \leq p \leq 10, m < 1000000$ en $11 \leq p \leq 25, m < 10000$ zijn als enige priemaantallen gevonden: $a(1,3,3) = a(8,3,3) = 3$
$a(1,4,4) = a(15,4,4) = 3$
$a(2,2,2) = 2$
$a(4,3,3) = a(5,3,3) = 23$
$a(6,4,4) = a(10,4,4) = 1051$
$a(10,20,20) = 3224759455808503871$, een getal van 19 cijfers.
$a(25,31,31) = 2175735915322881493271171546138850849174588165803$, een getal van 49 cijfers.

In de pdfs op wiskunde/pdfs staan nog de bestanden:
(a) Rasters en roosters Priemgetallen.pdf een verzameling priemgetallen voor a(p,m,n) Onbewerkt materiaal.
(b) raline-rasquare-rarechthoek.pdf een pdf van het programma op sagemath 10.0